数理解析研究所講究録
1014 巻 1997 年 76-90

量子化版等体積変換群の Berezin 表現

東京理科大学理工学部　大森　英樹 (Hideki Omori)

S^2 を普通の体積要素 Ω を持つ２次元球面とし、$\mathcal{D}_\Omega(S^2)$ を Ω を保つ C^∞ diffeom. 全体のなす群とする。

これはある意味で無限次元のリー群であり（強 ILH-Lie 群であり、かつ regular Fréchet Lie group である [2]）、そのリー環は divergence free な C^∞ vector fields 全体のなす空間 $\Gamma_\Omega(T_{S^2})$ である。

この群の量子化版である群 G を考え、群 G の行列表現（有限次元表現の族が得られる）を考えるのが本稿の目的ではあるのだが、話は多分そのように始めるのではなく、次のように始めるのが面白いのだろうと思う。

例えば、「原子核のまわりの一番外側の軌道をまわっている電子」といった記述が量子力学には出て来るが、これを言葉どうりに点電子が原子核から一番遠くの軌道をまわっている電子のことだと考える人はいないと思う。これが古典力学的描像を借りて述べた「言葉の綾」であることは広く受け入れられていると思われる。

場所とか、運動とかを感覚的に表現する言葉は古典力学の中には豊富だが量子力学のようなものを感覚的に表現する言葉は全く不足しているのである。これは、何が原因かと考えてみると、幾何学的言語、特に微分幾何学的言語が全く量子力学に馴染まないからであることがわかる。

従って、遠い目標だがこのような目的に合うように微分幾何学を改造する必要があると考えられる。

まず、量子論的に見た球面というのは何であろうか、いろいろ考え方はあるだろうと思うのだが、ここでは上に述べた群 G をがそれだと考えることにする。ちっとも球面らしくないではないか、という批判は十分、分かるが球面等という描像は古典的なものだから、すぐにそういうものに結びつかないからといって批判を受けるのは当たらない。

G の古典的側面として、群 $\mathcal{D}_\Omega(S^2)$ が現れると同時に、別な古典的側面として、有限次元行列表現の族として離散的な物も出現する。どちらか一方の側からの描像だけで話が済まないというのが本当の量子論の姿だろうと思ってみれば、この G こそが何やら実体であって、それ以外の物はある特定の面に投影した一側面だと思うことにしてもよさそうである。

このように考える事は自由だから、何が問題なのかと言うと、実体である G からどうやって豊富な描像を引き出すのか、その言葉と方法が問題なのである。数学として G の性質がどうであるとかいうことを言う事が問題なのではない。問題の本質は、幾何学的描像というのはどの様にして得られているのかということなのである。

1　Wick 代数、その拡張

まず Wick 代数と、それを位相完備化した代数を考えよう。$\zeta_1,\bar{\zeta}_1,\zeta_2,\bar{\zeta}_2$ を $\mathbf{C}^2$ 上の複素座標関数とし、$\mathbf{C}[\zeta,\bar{\zeta},\hbar]$ を　$\mathbf{C}^2\times\mathbf{R}_+$ 上の多項式の全体とする。Wick 代数 W とは

$\mathbf{C}[\zeta,\bar{\zeta},\hbar]$ に次の *Moyal product formula* と称する積 $*$ を入れた物である。

$$a * b = a \exp \hbar\{\sum \overleftarrow{\partial_{\bar{\zeta}_i}} \cdot \overrightarrow{\partial_{\zeta_i}} - \overleftarrow{\partial_{\zeta_i}} \cdot \overrightarrow{\partial_{\bar{\zeta}_i}}\}b.$$

但し、 $\exp \hbar\{\sum \overleftarrow{\partial_{\bar{\zeta}_i}} \cdot \overrightarrow{\partial_{\zeta_i}} - \overleftarrow{\partial_{\zeta_i}} \cdot \overrightarrow{\partial_{\bar{\zeta}_i}}\} = \sum_n \frac{1}{n!}\hbar^n\{\sum \overleftarrow{\partial_{\bar{\zeta}_i}} \cdot \overrightarrow{\partial_{\zeta_i}} - \overleftarrow{\partial_{\zeta_i}} \cdot \overrightarrow{\partial_{\bar{\zeta}_i}}\}^n$ で矢印はどちら側の関数を微分するのかを表している。無論、 $\overleftarrow{\partial}\overrightarrow{\partial} = \overrightarrow{\partial}\overleftarrow{\partial}$ である。

次のことはすぐに分かる：

$$\rho = \bar{\zeta}_1 * \zeta_1 + \zeta_2 * \bar{\zeta}_2 = \bar{\zeta}_1 \cdot \zeta_1 + \zeta_2 \cdot \bar{\zeta}_2.$$

ここで使われている可換積 $\cdot$ は $*$- 積を定義するための補助手段のように考えているが、$*$- 積の方から逆に $\cdot$- 積を定義することができることを注意しておく (cf.[1])。

W を位相完備化した代数を考えるために $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{R}_+$ 上の C^∞ 関数で次のような漸近展開を持つものの全体を $\Sigma^0(\mathbf{C}^2 \times \mathbf{R}_+)$ とする：

$$f \sim f_0 + f_1 \cdot \rho^{-1} + \cdots + f_k \cdot \rho^{-k} + \cdots, \qquad f_k(p,\hbar) \in C^\infty(S^3 \times \mathbf{R}_+).$$

ここで ρ^{-k} は普通の可環積 $\cdot$ に関する $(1/\rho)^k$ である。 更に、 $\Sigma^{-m}(\mathbf{C}^2 \times \mathbf{R}_+)$ を上の漸近展開が ρ^{-m} $(m \in \mathbf{Z})$ から始まるものの全体とする。次のように表す事にする:

$$\Sigma^{-\infty}(\mathbf{C}^2 \times \mathbf{R}_+) = \bigcap \Sigma^{-m}(\mathbf{C}^2 \times \mathbf{R}_+),$$
$$\Sigma^{\infty}(\mathbf{C}^2 \times \mathbf{R}_+) = \bigcup \Sigma^{m}(\mathbf{C}^2 \times \mathbf{R}_+).$$

$\Sigma^0(\mathbf{C}^2 \times \mathbf{R}_+)$ に位相を入れるには次のようにする：まず任意の $m \in \mathbf{Z}_+$ に対して

$$\Sigma^0(\mathbf{C}^2 \times \mathbf{R}_+) = \sum_{k=0}^{m} \oplus C^\infty(S^3 \times \mathbf{R}_+)\rho^{-k} \oplus \Sigma^{-(m+1)}(\mathbf{C}^2 \times \mathbf{R}_+).$$

と分解し、各直和成分に uniform C^∞ topology を与え、その直和位相を T_m とする。更にこの位相の族 $\{T_m\}_{m\in Z_+}$ より 射影極限位相 (projective limit topology) を $\Sigma^0(\mathbf{C}^2 \times \mathbf{R}_+)$ に入れる。

$\Sigma^m(\mathbf{C}^2 \times \mathbf{R}_+)$ $(m > 0)$, に対しては これを $\Sigma^0(\mathbf{C}^2 \times \mathbf{R}_+)\rho^m$ と同一視して位相を入れる。

$*$- 積を $\Sigma^\infty(\mathbf{C}^2 \times \mathbf{R}_+)$ に拡張するには、まず $\mathbf{C}^2$ を $\mathbf{R}^4$ と同一視して置いて、次の振動型積分の形で $*$- 積を $\Sigma^\infty(\mathbf{C}^2 \times \mathbf{R}_+)$ に定義する：

$$f * g = os\text{-}\int f(\mathbf{x}+\mathbf{X}, \mathbf{y}+\hbar\mathbf{Y})g(\mathbf{x}+\mathbf{X}', \mathbf{y}+\hbar\mathbf{Y}') \times e^{i(\mathbf{XY}'-\mathbf{YX}')}d\mathbf{X}d\mathbf{Y}d\mathbf{X}'d\mathbf{Y}',$$

ここで $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{XY}' - \mathbf{YX}' = \sum(X_iY_i' - Y_iX_i')$, $d\mathbf{X} = dX_1dX_2$ etc., であり、積分は f と g を積分が絶対収束する次数の所まで Taylor 展開して計算する。

この $*$- 積に関して $\Sigma^\infty(\mathbf{C}^2 \times \mathbf{R}_+)$ は完備な位相結合代数となり、任意の自然数 m に対して $\Sigma^{-m}(\mathbf{C}^2 \times \mathbf{R}_+)$ は $\Sigma^0(\mathbf{C}^2 \times \mathbf{R}_+)$ 中の閉両側イデアルとなる。自然に

$$C^\infty(S^3 \times \mathbf{R}_+)[[\rho^{-1}]] \cong \Sigma^0(\mathbf{C}^2 \times \mathbf{R}_+)/\Sigma^{-\infty}(\mathbf{C}^2 \times \mathbf{R}_+).$$

という線形同型対応があり、これを使えば、代数 $(\Sigma^0(\mathbf{C}^2 \times \mathbf{R}_+), *)$ から自然に剰余空間 $C^\infty(S^3 \times \mathbf{R}_+)[[\rho^{-1}]]$ 上に $*$- 積が定義される。

信条的にはこの代数を「外側世界」（曲面論を作るときに一番外側に仮定するユークリッド空間）という具合に考える。数学的にはこの代数の上でどのような定理が成立するかが問題なのだろうけど、ここで問題にしたいのは、この世界からどれだけ直観的にわかる言語を引き出せるかなのである。前にも述べたが、私の問題意識は直感的描像ないし幾何学的描像の方である。

2 $(\Sigma^\infty(\mathbf{C}^2 \times \mathbf{R}_+), *)$ での r_*, r_*^{-1} の存在

$\sqrt{\rho}$ or $\sqrt{\rho}^{-1}$ がこの代数の中で作れるかということは定かでない。これを確かめるために、$*$- 積の方で計算した指数関数 ($*$-exponential) $e_*^{-t\frac{1}{2}\rho}$ をまず計算する。

まず、$F_t(\rho) = e_*^{-t\frac{1}{2}\rho}$ のように一変数 s の関数 F_t を使って書けていると仮定しよう。

積公式より、次の式が得られる：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}F_t(\rho) &= -\frac{1}{2}\rho * F_t(\rho)\\ &= -\frac{1}{2}\rho \cdot F_t(\rho) + \hbar^2 F_t'(\rho) + \hbar^2 \frac{1}{2}\rho \cdot F_t''(\rho).\end{aligned}$$

これより、F_t は次の微分方程式を満たす事が分かる

$$\frac{\partial}{\partial t}F_t(s) = -\frac{1}{2}sF_t(s) + \hbar^2(F_t'(s) + \frac{1}{2}sF_t''(s), \quad F_0(s) = 1.$$

これを解いて、一意性を使うと次が得られる：

定理 1 $*$- 積に関する指数関数 $e_*^{-\frac{1}{2}\rho}$ は次の式で与えられる：

$$e_*^{-\frac{t}{2}\rho} = \frac{2e^{\hbar t}}{(e^{\hbar t}+1)^2}\exp\{-\frac{\rho}{\hbar}\tanh\frac{\hbar t}{2}\}$$

特に $e_*^{-\frac{t}{2}\rho} \in \Sigma^{-\infty}(\mathbf{C}^2 \times \mathbf{R}_+)$ であり、$\lim_{t\to\infty} e_*^{-\frac{t}{2}\rho} = 0$ であるが、

$$\lim_{t\to\infty} e_*^{-\frac{t}{2}(\zeta_1 * \bar\zeta_1 + \zeta_2 * \bar\zeta_2)} = \lim_{t\to\infty} e_*^{-\frac{t}{2}\rho} e^{\hbar t} = 2e^{-\frac{\rho}{\hbar}}$$

ともなる。この極限を $\varpi = 2e^{-\frac{\rho}{\hbar}}$ と置くと、積公式より、

$$\varpi * \varpi = \varpi, \quad \bar\zeta_i * \varpi = 0 = \varpi * \zeta_i, \quad i = 1,2 \tag{1}$$

となる。

(1) と併せて、

$$\zeta_1^i \zeta_2^j * \varpi * \frac{1}{\hbar^{k+l}}\bar\zeta_1^k \bar\zeta_2^l$$

が行列要素の働きをする。しかし、$\hbar$ が formal な変数として扱われているときには ϖ は $0 \in C^\infty(\mathbf{C}^2)[[\hbar]]$ と扱われる。

これより ϖ は真空の役目もすることが分かる。つまり、

$$\Sigma^{\infty}(\mathbf{C}^2 \times \mathbf{R}_+) * \varpi = C^{\infty}(\mathbf{R}_+) \otimes \mathbf{C}[\zeta_1, \zeta_2] * \varpi$$

を $\Sigma^{\infty}(\mathbf{C}^2 \times \mathbf{R}_+)|0\rangle$ のように使ってしまうことができる。これで、ϖ を regular 表現してみると、

$$\hat{\varpi} = \mathrm{diag}\{1, 0, 0, \cdots, 0, \cdots\}$$

となる。

ϖ は $*$-exponential の $t \to \infty$ での極限だから、これは何かの平衡状態であると考えても良いわけで、上の表現は平衡状態からの「ずれ」として行列表現を得ていると考えて良い。次のことがすぐに得られる：

系 1 $\exists(\frac{1}{2}\rho - z)^{-1} \in (\Sigma^0(\mathbf{C}^2 \times \mathbf{R}_+), *)$ *for* $Re\, z < \hbar$. 特に ρ は可逆である。

証明. 前の定理より $\int_0^{\infty} e_*^{-t(\frac{1}{2}\rho - z)} dt$ が $\mathrm{Re}\, z < \hbar$ の範囲で存在するから、 次のような計算をすれば良い：

$$(\frac{1}{2}\rho - z) * \int_0^{\infty} e_*^{-t(\frac{1}{2}\rho - z)} dt = -\int_0^{\infty} \frac{d}{dt} e_*^{-t(\frac{1}{2}\rho - z)} dt$$
$$= 1 - \lim_{t \to \infty} e_*^{-t(\frac{1}{2}\rho - z)} = 1.$$

これより $\frac{1}{2}\rho - z$ の逆は $\int_0^{\infty} e_*^{-t(\frac{1}{2}\rho - z)} dt$ であることが分る。

ρ の逆元を ρ_*^{-1} と表しておこう。（これは可換積での逆、 ρ^{-1} と異なるので要注意。）

ラプラス変換の公式を使って

$$\sqrt[*]{\rho_*^{-1}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \sqrt{t}^{-1} e_*^{-t\rho} dt.$$

$r_*^{-1} = \sqrt[*]{\rho_*^{-1}}$ と表せば、$(r_*^{-1})^2 = \rho_*^{-1}$ となることはすぐに分り、 $r_*^{-1} \in \Sigma^{-1}(\mathbf{C}^2 \times \mathbf{R}_+)$ は容易に示せる。そこで r_* を $r_* = r_*^{-1} * \rho$ として定義することにする。

3 等エネルギー面

$\rho = r_*^2$ は Hamiltonian と思えるから、普通の力学ならここで $\rho = const.$ なる等エネルギー面を考えるのだが、点描像のはっきりしていない上のような代数では ρ の値というのも古典的意味しかないから, 部分多様体というのを考えることが不自由である。ここでは、その代りとして次のような one parameter automorphism group $R(e^t)$ を考える:

$$R(e^t)\zeta_i = e^t\zeta_i, \quad R(e^t)\bar{\zeta}_i = \bar{\zeta}_i, \quad R(e^t)\hbar = e^{2t}\hbar.$$

上の式を automorphism として拡張するのであるが、上のように置くために、 $\hbar$ は数ではなく変数として扱っていないといけない。

$\mathcal{C}$ を上の $R(e^t)$ で不変な $\Sigma^0(\mathbf{C}^2 \times \mathbf{R}_+)$ の元全体のなす閉部分代数とする。自由度を一つ減らすために束縛条件式を添加するのでなく、部分代数を考えているわけである。 r_*^{-1} が定義できているから、 $\mathcal{C}$ は

$$\xi_i = r_*^{-1} * \zeta_i, \quad (i = 1, 2), \quad \mu = -2r_*^{-2} * \hbar \tag{2}$$

で位相的に生成 (closure をとる) されていることがわかる。

$\varpi \in \mathcal{C}$ であり、$\mu^{-1} * \varpi = \varpi$, $\bar{\xi}_i * \varpi = 0$ だから

$$\mathcal{C} * \varpi = \mathbf{C}[\xi_1, \xi_2] * \varpi.$$

であり、これを $\mathcal{C}$ の表現空間として使うことができる。つまり、$\forall f \in \mathcal{C}$ に対して $\hat{f}(a * \varpi) = f * a * \varpi$ なる線形写像

$$\hat{f} : \mathbf{C}[\xi_1, \xi_2] * \varpi \to \mathbf{C}[\xi_1, \xi_2] * \varpi.$$

を考えるのである。こうすると、μ^{-1} は

$$-\hat{\mu}^{-1} = \mathrm{diag}\{I_1, \cdots, kI_k, \cdots\}$$

のように行列表現されてしまう。ここで、I_k は $k \times k$ の単位行列である。$\hat{\xi}_i$, $\hat{\bar{\xi}}_i$ の形も容易にわかり、次の形になる；

$$\hat{w} = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \cdot & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} & \cdot & \cdots & \cdots \\ \cdot & B_{3,2} & B_{3,3} & B_{3,4} & \cdot & \cdots \\ \cdots & \cdot & B_{4,3} & B_{4,4} & B_{4,5} & \cdot \\ \cdots & \cdots & \cdot & B_{5,4} & B_{5,5} & B_{5,6} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

但し $B_{i,j}$ は $i \times j$- 行列で、$B_{i,j} = 0$ for $|i-j| \geq 2$ であり、残りの B_{ij} については、

$$\xi_1 \text{ については}, B_{s+1,s} = \begin{bmatrix} \sqrt{s} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \cdot & \cdot & \sqrt{2} & \\ & & 0 & \sqrt{1} \\ 0, & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{他の block は } 0,$$

$$\xi_2 \text{ については}, B_{s+1,s} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \sqrt{1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \sqrt{2} & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ & & & \sqrt{s} \end{bmatrix} \quad \text{他の block は } 0.$$

更に、$\bar{\xi}_i = {}^t\xi_i$ （転置行列） となる。

定理 2 $\mu, \xi_i, \bar{\xi}_i$ は $\Sigma^0(\mathbf{C}^2 \times \mathbf{R}_+)$ の元であり、これらは次のような関係式を満たす：

$$\bar{\xi}_1 * \xi_1 + \bar{\xi}_2 * \xi_2 = 1, \quad \xi_1 * \bar{\xi}_1 + \xi_2 * \bar{\xi}_2 = 1 + \mu,$$
$$[\mu^{-1}, \xi_i] = -\xi_i, \qquad [\mu^{-1}, \bar{\xi}_i] = \bar{\xi}_i,$$
$$[\xi_1, \xi_2] = [\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2] = 0, \quad [\xi_i, \bar{\xi}_j] = \mu(\delta_{ij} - \bar{\xi}_j * \xi_i) \qquad for \quad i, j = 1, 2.$$

さらに、$(1-\mu)^{-1}$ は存在するが、$1 + \mu$ の逆元は存在しない。

一行目の、交換子を使わないで書かれている関係式を見れば、この代数が S^3 の関数環のように見えてくるであろう。実際、 $\mathcal{C}^{-\infty}=\mathcal{C}\bigcap\Sigma^{-\infty}(\mathbf{C}^2\times\mathbf{R}_+)$. と置けば、

$$\mathcal{C}/\mathcal{C}^{-\infty}\cong C^\infty(S^3)[[\mu]]\quad \text{linearly.}$$

となるから、 $(\mathcal{C},*)$ は $C^\infty(S^3)[[\mu]]$ 上に結合的な積 $*$ を定義している。変数の自由度を一つ下げるには、点描像のしっかりしているところではその変数を固定する超曲面に話を制限すれば良いのであろうが、点描像のない世界では one parameter の変換群を考えて、それで不変な世界を見ないといけない。これが量子論的に曲面論を作ろうとするときの障害になっている。

$(C^\infty(S^3)[[\mu]],*)$ は contact algebra $C^\infty(S^3)$ の量子化されたもの (noncommutative contact algebra) と見ることができるので、以下でその理由を述べよう；

次は $(\mathcal{C},*)$ の性質を抜き出したものである。

定理 3 $B=C^\infty(S^3)$ と置き、 $[a,b]$ を交換子積 $a*b-b*a$ としよう、

$(A.1)$ $[\mu,\mathcal{C}]\subset\mu*\mathcal{C}*\mu$ （これより、 $[\mu^{-1},\mathcal{C}]\subset\mathcal{C}$ が出る）

$(A.2)$ $[\mathcal{C},\mathcal{C}]\subset\mu*\mathcal{C}$ （これより、 $\mathcal{C}/\mu*\mathcal{C}$ が可換代数となる）

$(A.3)$ $\mathcal{C}=B\oplus\mu*\mathcal{C}$ (*topological direct sum*).

$(A.4)$ μ を左、右からかける演算 $a\to\mu*a,\ a\to a*\mu$ は $\mu*:\mathcal{C}\to\mu*\mathcal{C},\ *\mu:\mathcal{C}\to\mathcal{C}*\mu$ なる線形同相写像となる。

$(A.5)$ $a\to\bar{a}$ なる *involutive anti-automorphism* がある。但し $\bar{\mu}=\mu$.

$(A.6)$ $\bigcap_k\mu^k*\mathcal{C}=\mathcal{C}^{-\infty}$.

性質 (A.3) より, $\forall$ 正整数 N に対して、 $\mathcal{C}$ は次のように分解される；

$$\mathcal{C}=B\oplus\mu*B\oplus\cdots\oplus\mu^{N-1}*B\oplus\mu^N*\mathcal{C}.$$

この分解にしたがって積を次のように分解してみる；

$\forall a,b\in B$ に対して

$$a*b\sim\sum\nolimits_{k\geq0}\mu^k*\pi_k(a,b),\quad \pi_k(a,b)\in B.$$

容易に、この分解の初項は通常の可換積を使って $\pi_0(a,b)=a\cdot b$ となることがわかり、第二項 π_1 の skew part π_1^- は $B\times B$ から B への biderivation となることが $*$- 積の結合性より確かめられる。一方、 $\mathrm{ad}(\mu^{-1})$ は次の式で自然に $\mathcal{C}$ に derivation を定義している；

$$[\mu^{-1},a]=-\mu^{-1}*[\mu,a]*\mu^{-1}.$$

そこで、これも上の分解に従って

$$\mathrm{ad}(\mu^{-1})(a)=\xi_0(a)+\cdots+\mu^k*\xi_k(a)+\cdots.$$

と分解すると、その初項 ξ_0 は $(B,\cdot)$ の derivation を与えていることがわかる。つまり、$\sqrt{-1}\xi_0$ は C^∞ vector field となる。これを *characteristic vector field* と呼ぶ。

$(B,\cdot,\xi_0,\pi_1^-)$ は古典的な意味での contact structure を S^3 に定義しているのである。次のことはすぐ確かめられる；

$$[\mu^{-1}*\mathcal{C},\mathcal{C}]\subset\mathcal{C},\quad [\mu^{-1}*\mathcal{C},\mu^{-1}*\mathcal{C}]\subset\mu^{-1}*\mathcal{C}$$

量子力学は symplectic geometry, contact geometry に似せて構成されてきたのだからこのようになるのは不思議なことではないのだが、量子力学が構成されるとき、古典的曲面論は指導原理にならなかったといういきさつが、テンソル解析を使う古典的重力理論の量子化を難しくしている。つまり、非可換代数でも接ベクトル場の方は derivation として考えれば良いのだが、接空間の方は考えにくいし、微分幾何でおなじみの frame という考え方も定義しにくいのである。（従って、connection とか curvature tensor といったものが量子論的には定義しにくい。）

4 Reduction

$\Sigma^0(\mathbf{C}^2\times\mathbf{R}_+)$ の中で、μ と可換な元全体のなす部分代数

$$\mathcal{V}=\{f\in\mathcal{C};[\mu,f]=0\}$$

を考えよう。μ は Hamiltonian の役目をしていたから、$\mathcal{V}$ は通常の簡約の操作で得られる部分代数と思って良い。$\mathcal{V}$ も定理 3 に対応する性質を持つが、$\mathcal{V}$ の中では μ は center の元となっている。次の事がすぐにわかるであろう；

$$\begin{gathered}\varpi\in\mathcal{V},\quad \varpi*\mathcal{V}=\mathcal{V}*\varpi=\mathbf{C}\varpi.\\ [\mu^{-1},\xi_i]=-\xi_i,\quad [\mu^{-1},\bar{\xi}_i]=\bar{\xi}_i.\end{gathered}\tag{3}$$

これより、$\mathcal{V}$ は

$$\mu,\ \ \xi_1*\bar{\xi}_1,\ \ \xi_1*\bar{\xi}_2,\ \ \xi_2*\bar{\xi}_1\ (=(\xi_1*\bar{\xi}_2)^-).$$

により (位相的に) 生成されていることもわかる。

$-\mu^{-1}$ が diagonal に $\{I_1,2I_2,\cdots,kI_k,\cdots\}$ の形に表現されていたから、任意の $\mathcal{V}$ の元も blockwise diagonal な行列に表現されていることがわかる。

$\mathcal{V}^{-\infty}=\mathcal{V}\bigcap\Sigma^{-\infty}(\mathbf{C}^2\times\mathbf{R}_+)$ と置けば、$\mathcal{V}^{-\infty}$ は閉両側イデアルで、

$$\mathcal{V}/\mathcal{V}^{-\infty}\cong C^\infty(S^2)[[\mu]]\qquad\text{(線形同型)}$$

だから $(\mathcal{V},*)$ から自然に noncommutative associative product が $C^\infty(S^2)[[\mu]]$ 上に定義される。少し詳しく見ると、この代数 $(C^\infty(S^2)[[\mu]],*)$ は Poisson algebra $(C^\infty(S^2),\cdot,\{\ ,\ \})$ から deformation quantization という手続きで得られた代数と同型となることがわかる。

Poisson algebra は同時に Lie algebra でもあるのだが、Lie algebra $(C^\infty(S^2),\{\ ,\ \})$ は $\mathcal{D}_\Omega(S^2)$ の Lie algebra を複素化したものの central extension にもなっていることに注意しておこう。

このことに対応することだが、$(\mu^{-1}*\mathcal{V},[\ ,\ ])$ はLie algebra /**C** になっている。そこで、このLie algebraを $(C^\infty(S^2),\{\ ,\ \})$ のquantizationと思うことにする。$\mathrm{ad}(\mu^{-1}*\mathcal{V})$ が $(\mathcal{V},*)$ の **C** 係数のderivation全体の作るLie algebraになっている。

$(\mathcal{V},*)$ が次の元で位相的に生成されていることは明らかであろう；

$$H=\xi_1*\bar{\xi}_1-\frac{1+\mu}{2},\quad Z=\xi_1*\bar{\xi}_2,\quad Z^*=\xi_2*\bar{\xi}_1$$

定理2を使えば、この代数がLie algebra $sl_\mu(2;\mathbf{C})$:

$$[H,Z]=-\mu*Z,\ [H,Z^*]=\mu*Z^*,\ [Z,Z^*]=-2\mu*H \tag{4}$$

のenveloping algebraに、束縛関係式

$$(H+\frac{\mu}{2})^2+Z*Z^*=\frac{1}{4} \tag{5}$$

を加えたものであることは容易にわかるであろう。関係式 $(H+\frac{\mu}{2})^2+Z*Z^*$ はenveloping algebraの中ではcenterの元になっているが、この関係式の為に、この代数が S^2 上の関数環に見えてくるわけである。

これらの元 H, Z, Z^* のmatrix表現は次のようになっている；

$$H=diag\{B_{1,1},B_{2,2},\cdots,B_{k,k},\cdots\},$$

$$Z=diag\{B'_{1,1},B'_{2,2},\cdots,B'_{k,k},\cdots\},$$

但し、

$$B_{k,k}=\frac{1}{2k}\mathrm{diag}\{k-1,k-3,\cdots,-(k-3),-(k-1)\},$$

$$B'_{k,k}=k^{-1}\times\begin{bmatrix}0, & \sqrt{(k-1)1}, & & & \\ & 0, & \sqrt{(k-2)2}, & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0, & \sqrt{1(k-1)} \\ & & & & 0\end{bmatrix}$$

Z^* については $Z^*={}^tZ$ のように転置を取れば良い。

$\mu^{-1}*\mathcal{V}$ の各元 $\mu^{-1}*a$ がblockwise diagonal (各blockは有限rank) の行列に表現されているから、$\exp\mu^{-1}*a$ を考えることができ、これらから生成される群を有限次元複素Lie群の射影極限として考えることはできる。しかし、$\mu^{-1}\mathcal{V}$ の位相は射影極限位相よりはるかに強いので、この群を $\mu^{-1}\mathcal{V}$ をLie環に持つLie群のように考えることは出来ない。(cf.[2], §VII, Corollary 4.4.)

しかし、Lie環 $\mu^{-1}\mathcal{V}$ は

$$\mu^{-1}\mathcal{V}\supset\mathcal{V}\supset\mu\mathcal{V}\supset\cdots\mu^k\mathcal{V}\supset\cdots$$

のような Lie ideal による filtration を持っているので、これを利用して $\mu^{-1}\mathcal{V}$ の部分 Lie 環 $\mu^{-1}\mathcal{V}_R$ で

$$\mu^{-1}\sqrt{-1}a_{-1} + a_0 + \mu a_1 + \cdots , \qquad a_{-1} \text{ は real valued}$$

の形に展開されるものを取ると、$\mu^{-1}\mathcal{V}_R$ を Lie 環に持つ無限次元の Lie 群 (regular Fréchet Lie group [2]) G は構成できる。

この群を $\mathcal{D}_\Omega(S^2)$ の量子化版と考えることにするわけである。実際、 G_0 を $\{\exp a; a \in \mathcal{V}\}$ から生成される G の閉部分群とすると、これは normal subgroup で

$$G/G_0 \cong \mathcal{D}_\Omega(S^2)$$

となっている。群 $\mathrm{Ad}(G)$ が代数 $(\mathcal{V}, *)$ の自己同型群（多分全体）となることは言うまでもあるまい。

一方、 G は有限次元 Lie 群の射影極限に埋め込めるから、たくさんの有限 codimension の正規部分群を含んでいる。

5 局所生成元

可換代数の時と違って、局所化とか、局所生成元というものをうまく定義する方法が無いのであるが、考えてみれば、このような概念は点描像に密着したものであるから、古典的描像に頼らない限りこれは難しいと思われる。つまり、局所というのは何らかの意味で場所を指定することを含むが、場所という概念そのものが古典的な点描像に依存しているからである。

そこで、ここでは $\Sigma^0(\mathbf{C}^2 \times \mathbf{R}_+)$ とか $\mathcal{C}$ or $\mathcal{V}$ のような代数の局所化 (*Localization*) とは単にこれらを別の代数の中に homomorphism で写すことだと考えてしまうことにする。これも、「ちっとも局所化らしくない」という批判は十分わかるのだが、場所について何も言わないで「局所」について何か言えと言われれば、上のように述べるしかあるまい。

このようにすると何が問題になってくるかというと、普通の微分幾何では点描像がしっかりしているから、テンソル解析が可能になるのに対して、上のように言っているだけではそれができないと言うところである。

$i = 1, 2$ に対して、 $\zeta_i, \hbar$ だけを使って、 $\Sigma^m_{[i]}(\mathbf{C} \times \mathbf{R}_+)$ を $\Sigma^m(\mathbf{C}^2 \times \mathbf{R}_+)$ と同様に定義しておく。

ρ の時と同様に $i = 1, 2$ に対して、

$$e_*^{-\frac{t}{2}\zeta_i\bar{\zeta}_i} = \frac{2e^{\hbar t/2}}{e^{\hbar t}+1}\exp\{-\frac{\zeta_i\bar{\zeta}_i}{\hbar}\tanh\frac{\hbar t}{2}\}$$

が成立し、 $e_*^{-\frac{t}{2}\zeta_i\bar{\zeta}_i} \in \Sigma^{-\infty}_{[i]}(\mathbf{C} \times \mathbf{R}_+)$ であり、さらに $e_*^{-\frac{t}{2}\bar{\zeta}_i * \zeta_i} = e_*^{-\frac{t}{2}\zeta_i\bar{\zeta}_i}e^{-\frac{t}{2}\hbar}$

$$\lim_{t\to\infty} e_*^{-\frac{t}{2}\zeta_i * \bar{\zeta}_i} = \lim_{t\to\infty} e_*^{-\frac{t}{2}\zeta_i\bar{\zeta}_i}e^{\frac{t}{2}\hbar} = 2e^{-\frac{\zeta_i\bar{\zeta}_i}{\hbar}}$$

となることがわかる。これより、 $\zeta_i\bar{\zeta}_i$ と $\bar{\zeta}_i * \zeta_i$ は invertible だが $\zeta_i * \bar{\zeta}_i$ は invertible でないこともわかる。

さらに ζ_i は left inverse $(\bar{\zeta}_i * \zeta_i)^{-1} * \bar{\zeta}_i$ を持つが、右側については $\varpi_i = 2e^{-\frac{\zeta_i\bar{\zeta}_i}{\hbar}} \in \Sigma^{-\infty}_{[i]}(\mathbf{C}\times\mathbf{R}_+)$ と置くと

$$\zeta_i * ((\bar{\zeta}_i * \zeta_i)^{-1} * \bar{\zeta}_i) = 1 - \varpi_i \qquad (i=1,2) \tag{6}$$

としかならないこともわかる。

積公式より、次のような公式が簡単に得られる；

$$\begin{aligned} &\varpi_1 * \varpi_2 = \varpi_2 * \varpi_1 = \varpi, \quad \varpi_i * \varpi_i = \varpi_i, \quad (i=1,2) \\ &\bar{\zeta}_i * \varpi_i = 0 = \varpi_i * \zeta_i, \quad \zeta_i * \varpi_j = \varpi_j * \zeta_i \quad \text{for } i \neq j \\ &\varpi_i * \mu = \mu * \varpi_i, \quad \varpi_i * r_* = r_* * \varpi_i, \quad \bar{\xi}_i * \varpi_i = \varpi_i * \xi_i = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Laplace 変換の公式を使って

$$\sqrt[*]{\zeta_i\bar{\zeta}_i}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \sqrt{t}^{-1} e_*^{-t\zeta_i\bar{\zeta}_i}dt.$$

ということもわかる。 次の補題が成立する；

補題 1 $\zeta_i * \sqrt[*]{\bar{\zeta}_i * \zeta_i}^{-1} \in \Sigma^0_{[i]}(\mathbf{C}\times\mathbf{R}_+)$, しかしこれは ζ_i の *unitary part* ではないので要注意。

この辺の計算には次の補題が大変便利である；

補題 2 Bumping Lemma 詳しい条件は言わないが、多くの一変数の関数 $f(t)$ に対して、次の等式

$$f_*(z*\bar{z})*z = z*f_*(\bar{z}*z)\bar{z}*f_*(z*\bar{z}) = f_*(\bar{z}*z)*\bar{z}$$

が成立する。 例えば、

$$f_*(\zeta_i\bar{\zeta}_i + \hbar)*\zeta_i = \zeta_i * f_*(\zeta_i\bar{\zeta}_i - \hbar).$$

証明. まず、結合性より等式 $(z*\bar{z})^n * z = z*(\bar{z}*z)^n$ が得られるから、 $e_*^{tz*\bar{z}} * z = z * e^{t\bar{z}*z}$ が得られ、これを使うとこの場合の必要な式は得られる。同じ考え方で大体、多項式近似ができれば、それを使って証明ができる。

$$\tau_i = e_*^{-\frac{1}{2}\bar{\zeta}_i*\zeta_i}, \quad T_i = \zeta_i * \sqrt[*]{\bar{\zeta}_i * \zeta_i}^{-1}, \quad T_i^* = \sqrt[*]{\bar{\zeta}_i * \zeta_i}^{-1} * \bar{\zeta}_i$$

と置くと、次がえられる；

補題 3 $T_i^* * T_i = 1, \quad T_i * T_i^* = 1 - \varpi_i, \quad \tau_i * T_i = e^{-\hbar}T_i * \tau_i,$
$[T_i, T_j] = 0, \; [T_i, T_j^*] = 0 \; (i \neq j), \quad T_i^* * \varpi_i = 0 = \varpi_i * T_i.$

T_i, T_i^* は Töplitz 代数を生成しており、 $T_i^k * \varpi_i * T_i^{*l}$ は (k,l)- 行列要素になっているのである。

$i = 1, 2$ に対して 次のように代数を膨らまして考えることにする；

$$\tilde{\Sigma}^0_{[i]}(\mathbf{C}^2 \times \mathbf{R}_+) = \text{algebra generated by } \{\Sigma^0(\mathbf{C}^2 \times \mathbf{R}_+), \Sigma^0_{[i]}(\mathbf{C} \times \mathbf{R}_+)\}$$

$\tilde{\mathcal{C}}_{[i]}$, $\tilde{\mathcal{V}}_{[i]}$ も同様に定義して前にも述べたようにこれを局所化と考えることにする。

$\bar{\xi}_i \xi_i = \bar{\zeta}_i * \zeta_i * r_*^2 * (1-\mu)^{-1}$ だから、これの逆元は存在して、 $(\bar{\xi}_1 * \xi_1)^{-1} \in \tilde{\mathcal{C}}_{[1]}$ となることが分り、同様に $\exists (1 - \xi_1 * \bar{\xi}_1)^{-1} \in \tilde{\mathcal{C}}_{[2]}$ ということがわかる。次のような元 $z \in \tilde{\mathcal{V}}_{[1]}$, $w \in \tilde{\mathcal{V}}_{[2]}$

$$\begin{aligned} z &= \xi_2 * \{(\bar{\xi}_1 * \xi_1)^{-1} * \bar{\xi}_1\} = \zeta_2 * \{(\bar{\zeta}_1 * \zeta_1)^{-1} * \bar{\zeta}_1\}, \\ w &= \xi_1 * \{(\bar{\xi}_2 * \xi_2)^{-1} * \bar{\xi}_2\} = \zeta_1 * \{(\bar{\zeta}_2 * \zeta_2)^{-1} * \bar{\zeta}_2\} \end{aligned}$$

を考えよう。これらは、古典論での P^1C の座標関数 $z = \xi_2/\xi_1$, $w = \xi_1/\xi_2$ のような役目をしている。(6) より次の式が容易に得られる；

$$z * \varpi_1 = \varpi_2 * z = 0, \qquad w * \varpi_2 = \varpi_1 * w = 0.$$

これより、 $z * \varpi = \varpi * z = 0, w * \varpi = \varpi * w = 0$ を得る。

定理 4 $1 + z * \bar{z}$, $1 + \bar{z} * z$ は $\tilde{\mathcal{V}}_{[1]}$ の中で逆元を持ち、

$$\begin{aligned} (1 + z * \bar{z})^{-1} &= \xi_1 * \bar{\xi}_1 - \mu \in \mathcal{V} \\ (1 + \bar{z} * z)^{-1} &= \xi_1 * \bar{\xi}_1 + \varpi_1 \in \tilde{\mathcal{V}}_{[1]} \end{aligned}$$

となる。

証明. $1 + z * \bar{z} = r^2 * (\bar{\zeta}_1 * \zeta_1)^{-1}$. 従って、 $(1 + z * \bar{z})^{-1}$ が存在し、 $= \xi_1 * \bar{\xi}_1 - \mu$ となる。$(1 + z * \bar{z})^{-1}$ があるので、 $1 - \bar{z} * (1 + z * \bar{z})^{-1} * z$ は $1 + \bar{z} * z$ の逆元となる。右辺のようになることは少し計算を要する。

$\xi_2 = z * \xi_1$, $\xi_1 = w * \xi_2$, $\varpi_1 * \xi_1 = 0$, $\varpi_2 * \xi_2 = 0$ となることに注意しよう。このことより、 $\{\mu, z, \bar{z}, \xi_1, \bar{\xi}_1\}$ は $\tilde{\mathcal{C}}_{[1]}$ を (位相的に) 生成し, $\{\mu, w, \bar{w}, \xi_2, \bar{\xi}_2\}$ は $\tilde{\mathcal{C}}_{[2]}$ を (位相的に) 生成していることがわかる。 次の式が成立する；

$$\begin{aligned} [z * \bar{z}, \bar{z} * z] &= 0, & [w * \bar{w}, \bar{w} * w] &= 0, \\ [z, \xi_1] * (1 - \varpi_1) &= 0, & [w, \xi_2] * (1 - \varpi_2) &= 0 \\ [z, \xi_2] &= 0, & [w, \xi_1] &= 0, \\ \varpi_1 * (1 + z * \bar{z}) &= -\mu^{-1} * \varpi_1, & \varpi_1 * (1 + \bar{z} * z) &= \varpi_1. \end{aligned} \tag{8}$$

(6) を使うと、 $z * w = 1 - \varpi_2 \in \tilde{\mathcal{V}}_{[2]}$, $w * z = 1 - \varpi_1 \in \tilde{\mathcal{V}}_{[1]}$ が得られ、 $1 - \varpi_2, 1 - \varpi_1$ には逆元がないから、 z, w にも逆元はない。定理 4 の公式と (8) の最後の二つを使うと、

$$\begin{aligned} [z, \bar{z}] &= \mu(1 + z * \bar{z}) * (1 + \bar{z} * z) + \mu^{-1} * \varpi_1 \\ [w, \bar{w}] &= \mu(1 + w * \bar{w}) * (1 + \bar{w} * w) + \mu^{-1} * \varpi_2 \end{aligned}$$

という式が得られる。上は標準的なリーマン球の Kähler 計量の形と少し違って、$\mu^{-1}\varpi_i$ という余計なものが付いている。

$\tilde{\mathcal{V}}_{[1]}$ は $\{\mu, z, \bar{z}\}(\subset \tilde{\mathcal{C}}_{[1]})$ で、$\tilde{\mathcal{V}}_{[2]}$ は $\{\mu, w, \bar{w}\}(\subset \tilde{\mathcal{C}}_{[2]})$ で生成され、$\mathcal{V} = \tilde{\mathcal{V}}_{[1]} \cap \tilde{\mathcal{V}}_{[2]}$. となるといったことがわかる。

$\xi_1^k * \xi_2^l * \varpi$, $(k+l=m)$ は古典的には一次元複素射影空間 S^2 上の tautological line bundle L を m-tensor した holomorphic line bundle L^m の holomorphic sections の空間とみなせるが、これを $\mathcal{H}_m$ と書いておこう。当然 $\mathcal{H}_m = \{0\}$ for $m<0$、かつ $\mathcal{H}_m \cong \mathcal{P}_m$ for $m \geq 0$ である。

$\tilde{\mathcal{V}}_{[1]}$ (resp. $\tilde{\mathcal{V}}_{[2]}$) 上では

$$\xi_1^k * \xi_2^l = z^l * \xi_1^m, \ (\text{resp.} \ = w^k * \xi_2^m)$$

であり、"座標変換" は次の式で与えられる；

$$\xi_1^k * \xi_2^l = w^k * \xi_2^m = (w^k * \xi_1^m) * z^m = z^l * \xi_1^m.$$

次のような元も定義できることに注意しておこう；

$$\tilde{T}_1 = \xi_1 * (\bar{\xi}_1 * \xi_1)^{-1/2}, \quad \tilde{T}_2 = \xi_2 * (\bar{\xi}_2 * \xi_2)^{-1/2}$$

$\{\mu, z, \bar{z}, \tilde{T}_1, \tilde{T}_1^*\}$, $\{\mu, w, \bar{w}, \tilde{T}_2, \tilde{T}_2^*\}$ これらは、束縛条件式なしの基本関係式を書こうとするときに必要となる。

これらを局所生成元（局所座標系）として採用したときの座標変換公式は正確なものは面倒だが、modulo ϖ_1, ϖ_2 で計算するときには、

$$\{\mu,\ w,\ \bar{w},\ \tilde{T}_2\} = \{\mu,\ z^{-1},\ \bar{z}^{-1},\ e_*^{i\theta_+} * \tilde{T}_1\}$$

のようになる。但し、$e_*^{i\theta_+}$ は z の polar decomposition の unitary part で、このようなものは $\mathcal{C}/\{\varpi_1, \varpi_2\}$ の中でなら存在する。$z = \xi_2 * \{(\bar{\zeta}_1 * \zeta_1)^{-1} * \bar{\zeta}_1 * r_*\}$, だから

$$e_*^{i\theta_+} * \tilde{T}_1 = \tilde{T}_1 * e_*^{i\theta_+} = \tilde{T}_2$$

となるわけである。上の座標変換の形からこれは Riemann sphere $P^1(\mathbf{C}) = S^2$ 上の Hopf bundle S^3 の quantum version と理解して良いだろう。

これらのことから、局所化された代数は $k+l=m$ の所では次の式が成り立つように行列表現されていることもわかる；

$$\hat{\mu}(\xi_1^k * \xi_2^l * \varpi) = -\frac{1}{m+1} * \xi_1^k * \xi_2^l * \varpi.$$

$$\hat{z}(\xi_1^k * \xi_2^l * \varpi) = \xi_1^{k-1} * \xi_2^{l+1} * \varpi, \quad \xi_1^{-1} = \xi_2^{m+1} = 0$$

$$\hat{w}(\xi_1^k * \xi_2^l * \varpi) = \xi_1^{k+1} * \xi_2^{l-1} * \varpi, \quad \xi_2^{-1} = \xi_1^{m+1} = 0.$$

$$\hat{\varpi}_1(\xi_1^k * \xi_2^l * \varpi) = \delta_{k,0}\xi_2^l * \varpi$$

$$\hat{\varpi}_2(\xi_1^k * \xi_2^l * \varpi) = \delta_{0,l}\xi_1^k * \varpi$$

$$\hat{\varpi}(\xi_1^k * \xi_2^l * \varpi) = \delta_{k,0}\delta_{0,l} * \varpi$$

次の事も分る；

$$\bar{\xi}_1 * (1 + \bar{z} * z) * \xi_1 = 1,$$
$$\bar{\xi}_1 * (1 + \bar{z} * z) = (\bar{\xi}_1 * \xi_1)^{-1} * \bar{\xi}_1,$$
$$\varpi_1 * (1 + \bar{z} * z)^{-1} = -\mu * \varpi_1, \ \varpi_1 * (1 + z * \bar{z})^{-1} = \varpi_1$$

これらを使うと、w が $w = \xi_1 * (1 - \xi_1 * \bar{\xi}_1)^{-1} * \bar{\xi}_1 * \bar{z} = f(\mu, z, \bar{z})$. のように $\mu, z, \bar{z}$ だけで表されることも分る。

次の式も容易である；

$$[z, \bar{z} * (1 + z * \bar{z})^{-1}] = \mu + \varpi_1.$$

形式的に微分 ∂_z を定義してみると

$$[\hat{z}, \{\mu * \partial_z\}\hat{}\,] = \{\mu + \varpi_1\}\hat{}$$

が成立しているから、これより

$$\mu * \partial_z = \bar{z} * (1 + z * \bar{z})^{-1}$$

としてよいことがわかる。

$[z, \xi_1]*(1-\varpi_1) = 0$, $[z, \xi_2] = 0$ だから、$\xi_2^k = (z*\xi_1)^k = z^k*\xi_1^k$ (resp. $\xi_1^m = w^m*\xi_2^m$). $z^k * \xi_1^m * \varpi = 0$, for $k > m$ となることも分る。

直接計算で $k + l = m$ の所では

$$\frac{1}{\sqrt{2\hbar}^m}\frac{1}{\sqrt{k!l!}}\zeta_1^k * \zeta_2^l = \sqrt{-\mu}^{-m}\prod_{j=0}^{m-1}\sqrt{1 + j\mu} * \frac{1}{\sqrt{k!l!}}\xi_1^k * \xi_2^l.$$

という式も得られる。$\hat{\mu}^{-1}$ は $\Gamma(L^m)$ 上では $-(m+1)$ だから $\tilde{\mathcal{V}}_{[1]}$ 上では

$$\frac{1}{\sqrt{2\hbar}^m}\frac{1}{\sqrt{k!l!}}\zeta_1^k * \zeta_2^l = \sqrt{\frac{(m+1)!}{k!l!}}\xi_1^k * \xi_2^l = \sqrt{\frac{(m+1)!}{k!l!}}z^l * \xi_1^m$$

となる。

線形空間としての $\mathcal{H}_m$ の基底は $k + l = m$ として次で与えられる；

$$\frac{\sqrt{(m+1)!}}{\sqrt{k!l!}}\xi_1^k * \xi_2^l = \begin{cases} \frac{\sqrt{(m+1)!}}{\sqrt{k!l!}}z^l * \xi_1^m & (\text{on } \tilde{\mathcal{V}}_{[1]}) \\ \frac{\sqrt{(m+1)!}}{\sqrt{k!l!}}w^k * \xi_2^m & (\text{on } \tilde{\mathcal{V}}_{[2]}) \end{cases}$$

これは、通常の内積に関して正規直交基底にもなっている。

したがって、上に選んだ生成元に対する 行列表現は $m \geq 0$ のところで次のように与えられる；

$$(\xi_1*\bar{\xi}_1)\hat{}: \sqrt{\frac{(m+1)!}{(m-l)!l!}}z^l * \xi_1^m * \varpi \to \frac{m-l}{m+1}\sqrt{\frac{(m+1)!}{(m-l)!l!}}z^l * \xi_1^m * \varpi,$$

$$(\xi_1*\bar{\xi}_2)\hat{}: \sqrt{\frac{(m+1)!}{k!l!}}z^l * \xi_1^m * \varpi \to \frac{\sqrt{(k+1)l}}{m+1}\sqrt{\frac{(m+1)!}{(k+1)!(l-1)!}}z^{l-1} * \xi_1^m * \varpi,$$

$$(\xi_2*\bar{\xi}_1)\hat{}: \sqrt{\frac{(m+1)!}{k!l!}}z^l * \xi_1^m * \varpi \to \frac{\sqrt{k(l+1)}}{m+1}\sqrt{\frac{(m+1)!}{(k-1)!(l+1)!}}z^{l+1} * \xi_1^m * \varpi,$$

但し、 $z^{-1}=z^{m+1}=0$ と置いている。ここで、 $\{\bar{\xi}_1*\xi_1,\ \bar{\xi}_2*\xi_1,\ \bar{\xi}_1*\xi_2\}$ も生成元になっていることに注意しよう。 Berezin が作った表現を得るには、 $\{\xi_1*\bar{\xi}_1, \xi_1*\bar{\xi}_2, \xi_2*\bar{\xi}_1\}$ を使わないで、このの生成元を使う方が良い；

容易に次のことが分る；

$$\bar{\xi}_1*\xi_1=-\frac{\mu}{2\hbar}*\frac{1}{1-\mu}*\bar{\zeta}_1*\zeta_1,\quad \bar{\xi}_2*\xi_1=-\frac{\mu}{2\hbar}*\frac{1}{1-\mu}*\bar{\zeta}_2*\zeta_1.$$

これらは容易に行列表現されて、

$$(\bar{\xi}_1*\xi_1)\check{}:\sqrt{\frac{(m+1)!}{(m-l)!l!}}z^l*\xi_1^m*\varpi\to\frac{m+1-l}{m+2}\sqrt{\frac{(m+1)!}{(m-l)!l!}}z^l*\xi_1^m*\varpi,$$

$$(\bar{\xi}_2*\xi_1)\check{}:\sqrt{\frac{(m+1)!}{k!l!}}z^l*\xi_1^m*\varpi\to\frac{\sqrt{(k+1)l}}{m+2}\sqrt{\frac{(m+1)!}{(k+1)!(l-1)!}}z^{l-1}*\xi_1^m*\varpi,$$

$$(\bar{\xi}_1*\xi_2)\check{}:\sqrt{\frac{(m+1)!}{k!l!}}z^l*\xi_1^m*\varpi\to\frac{\sqrt{k(l+1)}}{m+2}\sqrt{\frac{(m+1)!}{(k-1)!(l+1)!}}z^{l+1}*\xi_1^m*\varpi,$$

のようになる。但し、 $z^{-1}=z^{m+1}=0$ と置いている。regular 表現をもっと具体的に書くために次のような Berezin の積分変換を考えよう；

次の式は容易に得られる；

定理 5 z, v を $\mathbf{C}$ 上の *complex variables* とし、 $\forall$ の整数 $m(\geq 0)$ に対して 写像

$$I_m(p)(z)=\frac{m+1}{\pi}\int_{\mathbf{R}^2}p(v)\frac{(1+z\bar{v})^m}{(1+v\bar{v})^m}\frac{1}{(1+v\bar{v})^2}dvd\bar{v}$$

は m 次までの多項式の空間 $\mathcal{P}_m$ 上で恒等写像となる。 $p(v)=v^{m+l}$, $p(v)=v^{-l}$ のときは 0 となる。

証明. $\frac{1}{(1+v\bar{v})^2}dvd\bar{v}$ は S^2 の volume form なので、右辺の積分は S^2 上の積分と理解される。積分を極座標表示で書いて見ると、 $\int_{\mathbf{R}^2}\frac{v^k\bar{v}^l}{(1+v\bar{v})^2}dvd\bar{v}=0,\ (k\neq l)$ となること、および $k=l$ の場合は良く知られた公式になる。 $k=l>m$ となる場合は現われないことに注意すればよい。

この補題を使って、射影作用素 P_m を $f\in\Gamma(L^m)$ に対して

$$(P_mf)(z)=\frac{m+1}{\pi}\int_{\mathbf{R}^2}f(v,\bar{v})\frac{(1+z\bar{v})^m}{(1+v\bar{v})^m}\frac{1}{(1+v\bar{v})^2}dvd\bar{v}$$

と定義し (S^2 上の積分としてみている。従って $(v\bar{v})^k$, $(k>m)$ が現われて発散したりすることはない)、 $\forall f=\sum_m f_m*\xi_1^m*\varpi$, $f_m\in\mathcal{H}_m$ に対し $B(a)f$, $a\in C^\infty(S^2)$ を

$$B(a)f=\sum\nolimits_{m\geq0}P_m(a\cdot f_m)*\xi_1^m*\varpi$$

のように定義する。すると、 $B(a)$ は $\sum\oplus\mathcal{P}_m*\xi_1^m*\varpi$ から自分自身への linear operator となる。直接計算で、

$$\bar{\xi}_1*\xi_1=B(\frac{1}{1+\bar{z}z}),\quad \bar{\xi}_2*\xi_1=B(\frac{\bar{z}}{1+\bar{z}z}),\quad \bar{\xi}_1*\xi_2=B(\frac{z}{1+\bar{z}z})$$

がわかる。これが Berezin representation と呼ばれるものである。(cf. [3].) これによって、代数 $\mathcal{V}$ の operator 表現が得られたが、これは前に与えた表現と一致する。

$B(a)f$ は integral operator

$$B(a)f = \sum_{m\geq 0}\left\{\frac{m+1}{\pi}\int_{\mathbf{R}^2} a(v,\bar{v})f_m(v)\frac{(1+z\bar{v})^m}{(1+v\bar{v})^m}\frac{1}{(1+v\bar{v})^2}dvd\bar{v}\right\} * \xi_1^m.$$

で与えられる。結果として algebra $\mathcal{C}$ の任意の元も blockwise diagonal ではないが行列表現されることがわかる。

これらをまとめると；

定理 6 上の行列表現は代数 $\mathcal{C}$ まで広げて定義される。また代数 $\mathcal{V}$ は *blockwise diagonal* な行列に表現され、μ^{-1} は *diagonal matrix* に表現される。このことは $\mu^{-1} * \mathcal{V}$ は *finite dimensional Lie algebras* の射影極限のなかに連続に埋め込まれていることを示している。また *Lie algebra* $\mu^{-1} * \mathcal{C}$ も行列表現される。

特に Lie algebra $\mu^{-1} * \mathcal{V}$ は blockwise diagonal matrices として表現され、各 block が finite rank だから、まえに述べた群 G も blockwise diagonal matrices として表現されている。

これより、G も有限次元 Lie groups の射影極限の中に連続的に埋め込まれていることが分る。つまり、finite codimension の normal subgroups の列 N_k で

$$N_k \supset N_{k+1}, \quad \bigcap N_k = \{e\}$$

となるものがある。一方 G は $\{\exp v; v \in \mathcal{V}\}$ で生成される closed normal subgroup G_0 で

$$G/G_0 \cong \mathcal{D}_\Omega(S^2)\varpi_1 * \xi_1 = 0, \quad \varpi_2 * \xi_2 = 0$$

となるものも含んでいる。

参考文献

[1] T. Masuda, H. Omori *The noncommutative algebra of the quantum group $SU_q(2)$ as a quantized Poisson algebra,* in Symplectic Geometry and Quantization, Contem. Math. 179(1974), AMS. 161-172.

[2] H. Omori, *Infinite dimensional Lie groups,* Translations Math. Mono. 158, AMS.

[3] F.A. Berezin, *Quantization,* Math. USSR-Izv., 8(1974) 1109-1165.

[4] H. Omori, Y. Maeda, N. Miyazaki, A. Yoshioka, *Noncommutative 3-sphere: A model of noncommutative contact algebras,* to appear in J. Math. Soc. Japan.